Matematyka MAT1437

Semestr letni 2023/2024

Lista 1 (Równania różniczkowe zwyczajne pierwszego rzędu)

1. Sprawdzić, że podane funkcje są rozwiązaniami wskazanych równań różniczkowych na zadanych przedziałach:
   (a) $y(t) = \frac{\sin t}{t}, ty' + y = \cos t, \quad (0, \infty);$
   (b) $y(t) = t^2, \quad ty' + y = 3t^2, \quad \mathbb{R};$
   (c) $y(t) = \frac{1}{1+t^2}, \quad y' + 2ty^2 = 0, \quad \mathbb{R};$
   (d) $y(t) = -\sqrt{4-t^2}, \quad yy' = -t, \quad (-2, 2).$

2. Scałkować podane równania różniczkowe o zmiennych rozdzielonych:
   (a) $yy' + 4t = 0;$
   (b) $)\ dy = 2ty^2 dt;$
   (c) $t\left(y^2-1\right)dt + y\left(t^2-1\right)dy = 0;$
   (d) $2\sqrt{t}y' = \sqrt{1-y^2};$
   (e) $y' = 1 + t + y + ty;$
   (f) $y' + 4y = y\left(e^{-t}+4\right).$

3. Rozwiązać podane zagadnienia początkowe dla równań różniczkowych o rozdzielonych zmiennych:
   (a) $y' \sin t = y \ln y, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = e\ :$
   (b) $t\sqrt{1-y^2}dt + y\sqrt{1-t^2}dy = 0, \quad y(0) = 1$
   (c) $t(y+1)y' = y, \quad y(e) = 1;$
   (d) $y \cos t dt - \left(1+y^2\right)dy = 0, \quad y(0) = 1;$
   (e) $y' = y^2\left(1+t^2\right), \quad y(0) = -2$
   (f) $e^y\left(y'-1\right) = 1, \quad y(0) = 0.$

4. Scałkować podane równania różniczkowe jednorodne:
   (a) $ty' = \sqrt{t^2-y^2} + y;$
   (b) $(t-y)dt + tdy = 0;$
   (c) $ty' = y(\ln y - \ln t);$
   (d) $ty' - y = t \operatorname{tg} \frac{y}{t};$

(e) $(t^2 - y^2)\,dt + tydy = 0$;

(f) $t^2 y' = ty + y^2$.

5. Rozwiązać podane zagadnienia początkowe dla równań rózniczkowych jednorodnych oraz wyznaczyć przedziały, na których są one określone:

   (a) $(t^2 + y^2)\,dt - 2tydy = 0, y(1) = \sqrt{2}$;

   (b) $ty' = t + \frac{1}{2}y, y(1) = 0$;

   (c) $y' = \frac{4y^2 - t^2}{2ty}, y(1) = 1$

   (d) $(y^3 - t^3)\,dt - ty^2 dy = 0, y(1) = 3$.

6. Rozwiązać podane równania różniczkowe liniowe niejednorodne:

   (a) $y' + y = \sin t$

   (b) $y' + 2ty = e^{-t^2}$;

   (c) $ty' - 2y = t^3 \cos t$

   (d) $ty' - 2y = 4t^4$;

   (e) $ty + e^t - ty' = 0$

   (f) $(2t + 1)y' = 4t + 2y$.

7. Wyznaczyć rozwiązania podanych zagadnień początkowych dla równań liniowych niejednorodnych oraz podać przedziały, na których są one określone:

   (a) $y' - y = 1, y(3) = 3$;

   (b) $y' = (y + 1)\sin t, \quad y(t_0) = y_0$

   (c) $ty' + y = t + 1, y(1) = 0$

   (d) $y' \sin t \cos t = y + \sin^3 t, y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$.

8. Dla równania liniowego niejednorodnego $y' + py = q(t)$, gdzie $p \in \mathbb{R}$ wyznaczyć rozwiązanie $\varphi(t)$ w podanej postaci, jezeli:

   (a) $p = 4, \quad q(t) = t^2 - 1, \quad \varphi(t) = At^2 + Bt + C$;

   (b) $p = 1, \quad q(t) = t^4, \varphi(t) = At^4 + Bt^3 + Ct^2 + Dt + E$;

   (c) $p = -3, \quad q(t) = 4t^2 e^{-t}, \varphi(t) = (At^2 + Bt + C)\,e^{-t}$;

   (d) $p = -1, \quad q(t) = te^t, \varphi(t) = (At + B)te^t$;

   (e) $p = 2, \quad q(t) = \cos 3t, \varphi(t) = A \sin 3t + B \cos 3t$;

   (f) $p = -2, q(t) = 2 \sin \frac{t}{2} - \cos \frac{t}{2}, \varphi(t) = A \sin \frac{t}{2} + B \cos \frac{t}{2}$.

9. Znaleźć rozwiązanie równania różniczkowego liniowego niejednorodnego $t^2 y' + y = (t^2 + 1)\,e^t$ spelniające warunek $\lim_{t \to -\infty} y(t) = 1$.

10. Rozwiązać podane równania różniczkowe Bernoulliego:

    (a) $y' + 2ty = 2ty^2$;
    (b) $3ty^2y' - 2y^3 = t^3$;
    (c) $t\left(y' + y^2\right) = y$;
    (d) $y' - 2y = \sqrt{y}\sin t$;
    (e) $y' + \frac{y}{t} = ty\sqrt{y}, t > 0$;
    (f) $y' = y\left(y^2e^t - 1\right)$.

11. Rozwiązać podane zagadnienia początkowe dla równań różniczkowych Bernoulliego oraz wyznaczyć przedziały, na których są one określone:

    (a) $t^2y' + 2ty = y^3, t > 0 \quad y(1) = -1$;
    (b) $ty' + y = y^2\ln t, y(1) = 1$;
    (c) $y' - 2y = 2\sqrt{y}e^t\ln t, y(1) = 0$;
    (d) $2y'\ln t + \frac{y}{t} = \frac{1}{y}, y(e) = \sqrt{e}$.